Contrôle de mathématiques n° 4, option « expertes »

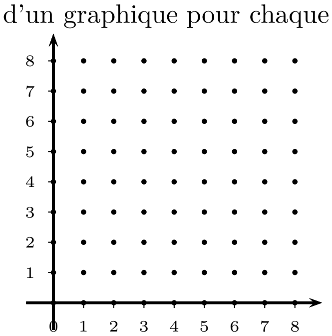
mardi 5 décembre 2023

EXERCICE 1. — 3 points

À la pointe ouest de l'île de Ré se situe le grand phare des baleines. L'escalier qui mène au sommet a un nombre de marches compris entre 246 et 260.
Ted et Laure sont deux sportifs. Laure qui est plus jeune monte les marches 4 par 4 et à la fin il lui reste 1 marche. Ted, lui, monte les marches 3 par 3 et à la fin il lui reste 2 marches.
Combien l'escalier compte-t-il de marches ?

EXERCICE 2. — 4,5 points

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère orthogonal, dont les coordonnées $(x;y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$. On note $R_{a,b}$ ce réseau.
Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.
Les réponses sont attendues sans explication, et seront données sous la forme d'un graphique pour chaque cas.



Représenter graphiquement les points $M(x;y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2\ [3]$ et $y \equiv 1\ [3]$ sur un premier graphique.
2. $x + y \equiv 1\ [3]$ sur un deuxième graphique.
3. $x \equiv y\ [3]$ sur un troisième graphique.

EXERCICE 3. — 5, 5 points

On considère l'équation notée (G) :
$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs et n un entier naturel.

1. Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo 7).
2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de $3x^2$ par 7.							

3. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

   En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

EXERCICE 4. — 6 points

Les 3 questions sont indépendantes.

1. Vérifier que 999 est divisible par 27.

   Quel est alors le reste dans la division euclidienne de $10^{100} + 100^{10}$ par 27?
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $5^{2n} - 14^n$ est divisible par 11.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x+3)^2 \equiv 1[4]$